

In Flagranti: Von drei Türen und einem betrogenem Ehemann

JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG, PATRICK WIESNER, REGENSBURG

Zusammenfassung: In Anknüpfung an einen Roman des Schriftstellers Ian McEwan wurde auf der Herbsttagung des Arbeitskreises Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 9.-11. Dezember 2022 eine Variante des berühmten Drei-Türen Paradoxes (bekannt auch als Ziegenproblem oder Monty Hall Problem) vorgestellt. Wir beschreiben den Kontext aus dem Roman kurz und präsentieren die von Patrick Wiesner eingereichte Lösung.

1 Einleitung

Es kommt nicht oft vor, dass mathematische Probleme Eingang in die Romanliteratur finden. In Ian McEwans Roman „Sweet Tooth“ (auf deutsch im Diogenes-Verlag erschienen unter den Titel „Honig“) findet sich eine Variante eines berühmten Brainteasers der Stochastik wieder: das Drei-Türen-Paradox (Ziegenproblem, Monty Hall Problem).

2 Die Geschichte im Roman

Bei einem ihrer Rendezvous in Brighton, nach einer Runde Austern und einer zweiten Flasche Champagner, stellt Tom Haley, ein Kurzgeschichtenautor, Serena Frome die Frage, die sich jede Mathematikerin von ihrem Liebhaber wünscht: „Ich möchte, dass du mir etwas erzählst... etwas Interessantes, nein, etwas Widersinniges, Paradoxes“.

Als dieses Gespräch stattfindet, glaubt Haley, dass er mit seiner Verbindungsperson der Kulturstiftung zusammen ist, die ihn dafür bezahlt, den nächsten großen englischen Roman zu schreiben. Tatsächlich ist Serena aber eine Agentin des britischen Geheimdienstes MI5, die Haley im Rahmen des Projekts mit dem treffenden Namen *Sweet Tooth* in einen Kulturkrieg gegen den Kommunismus locken soll. Während Haley nun sehnsüchtig auf eine „gute Mathematikgeschichte“ wartet, muss Selena in ihren Erinnerungen als Mathematikstudentin in Cambridge kramen, um ihre Tarnung aufrechtzuerhalten. Sie erinnert sich an das Monty-Hall Problem – also das Drei-Türen-Paradox oder Ziegenproblem, das während ihrer Studienzeit unter Mathematikern die Runde machte.

Das Szenario ist folgendes (siehe z. B. Atmaca & Krauss 2001): Man versetze sich in die Rolle eines Spielshow-Teilnehmers, der mit drei identischen Türen konfrontiert wird. Hinter einer befindet sich ein Auto, hinter den beiden anderen sind Ziegen. Der Moderator der Show, Monty Hall genannt, bittet uns, eine der Türen zu wählen. Wir wählen eine Tür aus,

öffnen sie aber nicht. Monty öffnet nun eine andere als die von uns gewählte Tür, wobei er darauf achtet, dass er immer eine Tür öffnet, von der er weiß, dass sie eine Ziege verbirgt. Monty gibt uns nun die Möglichkeit, entweder bei unserer ursprünglichen Wahl zu bleiben oder zu der einen anderen ungeöffneten Tür zu wechseln. Wenn wir die Chancen auf den Gewinn des Autos maximieren wollen, sollten wir dann wechseln oder ist es egal, für welche der beiden verbleibenden Türen wir uns entscheiden?

Wie Tausende von Lesern des Monty Hall Problems, die fälschlicherweise - viele ziemlich hartnäckig - darauf beharrten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Auto hinter einer der beiden verbleibenden Türen befindet, gleich groß ist, weigert sich auch Haley, Serenas Erklärung zu akzeptieren, dass der Teilnehmer seine Chancen verdoppelt, wenn er wechselt. Nachdem sie erfolglos versucht hat, Haley zu überreden, lassen die beiden den Streit ungelöst und kehren nach Hause zurück.

Doch nur wenige, die von Montys Problem verblüfft wurden, können es einfach loslassen, und Haley ist da keine Ausnahme. Mitten in der Nacht wird Haley aus dem Schlaf geweckt, weil er glaubt, die Lösung des Rätsels zu kennen. „Ich habe es verstanden! Serena, ich verstehe, wie es funktioniert. Alles, was du gesagt hast, ist so einfach. Es hat sich wie von selbst ergeben.“ (Übersetzung, S. 239 im englischen Original) Inspiriert von seiner Offenbarung, rennt Haley zu seiner Schreibmaschine, um eine Geschichte zu schreiben, die versucht, „eine mathematische Linie zu dramatisieren und ihr eine ethische Dimension zu geben“ (S. 243 im Original). Darin (S. 240ff im Original) stellt Haley das Problem als eine Geschichte dar, in der sich ein eifersüchtiger Ehemann nach einiger Entwicklung vor drei Hotelzimmertüren (Tür Nr. 401, 402 und 403) wiederfindet und weiß, dass seine Frau hinter einer der Türen mit einem anderen Mann zusammen ist. Er hat nur eine Chance, eine Tür aufzubrechen und sie auf frischer Tat zu ertappen. Aber welche Tür soll er wählen? Gerade als er sich für 401 entscheidet, verlässt ein indisches Paar mit mehreren kleinen Kindern das Zimmer 403. Nach seiner angeblichen Erkenntnis der Lösung des Monty Hall Problems ist er überzeugt, dass er nun eine Zwei-Drittel-Chance hat, sie zu erwischen, wenn er seine ursprüngliche Wahl ändert: „Er macht sich auf den Weg, er springt, die Tür von 402 fliegt auf und da ist das Paar, nackt im Bett, gerade dabei, loszulegen“ (S. 242 im Original), so Haleys Geschichte im Roman.

3 Das Problem

Ein eifersüchtiger Ehemann schleicht seiner Frau in ein Hotel nach und steht vor drei Hotelzimmertüren (Tür Nr. 401, 402 und 403). Er weiß, dass seine Frau in einem dieser Zimmer mit einem anderen Mann zusammen ist. Er hat nur eine Chance, eine Tür aufzubrechen und sie auf frischer Tat zu ertappen. Aber welche Tür soll er wählen?

Gerade als er sich entscheidet, die Tür zum Zimmer 401 aufzubrechen, verlässt ein indisches Paar mit mehreren kleinen Kindern das Zimmer 403.

Hat er nun eine Zwei-Drittel-Wahrscheinlichkeit sie zu erwischen, wenn er seine ursprüngliche Wahl ändert und die Tür zu Zimmer 402 aufbricht?

4 Die Lösung

Nein, die Wahrscheinlichkeit seine Frau zu erwischen, beträgt bei einem Wechsel 50 %. Dies soll durch eine Fallunterscheidung und eine Darstellung der möglichen Fälle durch Tabellen verdeutlicht werden. Die Idee, solche Situationen mithilfe von Tabellen aufzuklären, wurde beispielsweise von Krauss und Wang (2003) genutzt. In diesem Artikel werden die Tabellen direkt auf die Geschichte des Romans angepasst. Die Tabellen sind chronologisch von oben nach unten zu lesen. In den Tabellen sind ein „Treffer“ (Zimmer mit dem Liebespaar) dunkelgrau dargestellt und die „Nieten“ (falsches Zimmer) hellgrau schraffiert:

1. Fall: Paar ist in 402

401	402	403
Ehemann wartet hier		
		Paar kann nicht in 403 sein*

Tab. 1.: Erster möglicher Fall in der Geschichte des Romans, bei dem der Ehemann vor der „falschen“ Türe wartet

→ Bei einem Wechsel wird das Paar entdeckt.

→ Der Ehemann „gewinnt“.

*da dort die indische Familie ist.

2. Fall: Paar ist in 401

401	402	403
Ehemann wartet hier		
		Paar kann nicht in 403 sein*

Tab. 2.: Zweiter möglicher Fall in der Geschichte des Romans, bei dem der Ehemann vor der „richtigen“ Türe wartet

→ Bei einem Wechsel wird das Paar *nicht* entdeckt

→ Der Ehemann „verliert“.

*da dort die indische Familie ist.

3. Fall: Paar ist in 403

Kann nicht auftreten, weil dort die Familie ist.

Die beiden Fälle sind gleich wahrscheinlich. Somit gewinnt der Ehemann in einem von zwei Fällen bei einem Wechsel des Zimmers.

Der dritte Fall (Paar in 403) kann nicht auftreten, da aus der Aufgabe folgt, dass in diesem Zimmer die indische Familie war. Die Situation hier scheint dem oben geschriebenen Ziegenproblem sehr ähnlich zu sein, dennoch gibt es einen entscheidenden Unterschied:

Das Zimmer, in dem das Liebespaar ist, entspricht dem Auto und die falschen Zimmer je einer Ziege. Der Unterschied ist, dass hier das indische Paar „völlig zufällig“, also *unabhängig* von der Entscheidung des Ehemannes für eine Tür, aus einer der drei möglichen Türen kommt. Das Paar könnte also auch – im Gegensatz zum Ziegenproblem – aus der Tür kommen, vor der der Mann wartet. Beim Ziegenproblem hingegen öffnet der Moderator bewusst eine Türe hinter der 1) eine Ziege steht und 2) eine *andere Türe als die vom Kandidaten gewählte*. Bei dem Ziegenproblem würde also niemals die Türe, die der Kandidat wählt, als erstes geöffnet werden. Bei dem Beispiel mit dem Paar könnte aber durchaus das indische Paar aus 403 (wenn es nicht in der Aufgabestellung vorher festgelegt wäre) kommen. Das ist beim Ziegenproblem nicht der Fall.

Anschaulich hätte das Ziegenproblem also folgende Fälle:

o.B.d.A. wählt der Kandidat Tor 1. Dies entspricht in der Geschichte des Romans der Entscheidung des Ehemanns für das Zimmer 401.

1. Fall: Auto ist hinter dem ersten Tor

Tor 1	Tor 2	Tor 3
Kandidat wählt Tor 1		
	Moderator öffnet eines der beiden Tore	

Tab. 3.: Erster möglicher Fall beim Ziegenproblem, bei dem der Kandidat das richtige Tor ausgewählt hat

Da das Auto hinter Tor 1 ist, kann der Moderator sowohl Tor 1 als auch Tor 2 öffnen, ohne die Lösung zu verraten.

→ Bei einem Wechsel bekommt der Kandidat eine Ziege.

→ Der Kandidat „verliert“.

2. Fall: Auto ist hinter dem zweiten Tor

Tor 1	Tor 2	Tor 3
Kandidat wählt Tor 1		
		Moderator öffnet Tor 3

Tab. 4.: Zweiter möglicher Fall beim Ziegenproblem, bei dem der Kandidat das falsche Tor ausgewählt hat

Tor 2 kann der Moderator nicht öffnen, da dort das Auto ist.

→ Bei einem Wechsel bekommt der Kandidat das Auto.

→ Kandidat „gewinnt“.

3. Fall: Auto ist hinter dem dritten Tor

Tor 1	Tor 2	Tor 3
Kandidat wählt Tor 1		
	Moderator öffnet Tor 2	

Tab. 5.: Dritter möglicher Fall beim Ziegenproblem, bei dem der Kandidat das falsche Tor ausgewählt hat

Tor 3 kann der Moderator nicht öffnen, da dort das Auto ist.

→ Bei einem Wechsel bekommt der Kandidat das Auto.

→ Kandidat „gewinnt“.

Auch hier sind alle drei Fälle gleich wahrscheinlich, sodass der Kandidat durch einen Wechsel in zwei von drei Fällen gewinnt. Ohne die Beschränkung, dass das Auto hinter dem ersten Tor ist, gäbe es insgesamt neun analoge Fälle, bei denen der Kandidat in dreien davon gewinnt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit liegt also tatsächlich bei *Zwei-Drittel*.

5 Zurück zum Roman

Im Roman erkennt Selena schnell, dass Haleys Darstellung logisch eine Enttäuschung ist. Haley hat die Sache einfach nicht verstanden. Geleitet von unüberlegtem Enthusiasmus hat er den entscheidenden Punkt übersehen, dass Monty die Tür nicht zufällig wählt. Selena unternimmt daher einen Versuch, Haleys Geschichte zu retten in dem Sinne, dass der betrogene Ehemann durch Wechseln der Tür tatsächlich die Wahrscheinlichkeit verdoppelt, seine Frau in Flagranti mit ihrem Liebhaber zu erwischen. Dazu streicht Selena zunächst das indische Paar aus der Geschichte und ersetzt es durch das Auftreten des Reinigungspersonals des Hotels. Dieses weiß aus vergangenen amourösen Aufenthalten des Liebespaares im Hotel, welches Zimmer es bevorzugt. Das Personal sieht vor einem der Zimmer einen Mann, unseren Ehemann, stehen und hält ihn für einen neuen Gast, der gerade sein Zimmer betreten will. Daher entscheiden sich die Reinigungskräfte zunächst das dritte und noch freie Zimmer zu reinigen. Im mit $1/3$ Wahrscheinlichkeit möglichen Fall, dass der Ehemann tatsächlich vor der Tür des Liebespaares steht, wählen sie für ihre Reinigungsarbeiten rein zufällig eines der verbleibenden Zimmer. So wird durch Selenas Änderung im Skript der Kurzgeschichte die frappierende Logik der Geschichte noch gerettet und

die Analogie zum klassischen Monty-Hall Problem ist gesichert.

Danksagung

Wir danken Stefan Krauss für anregende Diskussionen und wertvolle Hinweise.

Literatur

Atmaca, S., & Krauss, S. (2001): Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz - Das "Drei-Türen-Problem", *Stochastik in der Schule* 21 (2001) 3, S. 14-21.

Krauss, S. & Wang, X. (2003). The Psychology of the Monty Hall Problem. *Discovering Psychological Mechanisms in Solving a Tenacious Brain Teaser. Journal of Experimental Psychology: General* 132(1), 3-22.

McEwan, I. (2012): *Sweet Tooth*. Jonathan Cape [Deutsche Übersetzung, 2013 erschienen unter dem Titel: *Honig*, Diogenes Verlag].

Anschrift der Verfasser

Joachim Engel
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
71638 Ludwigsburg
engel@ph-ludwigsburg.de

Patrick Wiesner
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Patrick.Wiesner@ur.de